# 第 2 节 规则几何体的结构计算（★★★）

## 内容提要

本节归纳涉及球、正棱锥、正棱台、圆锥、圆台等规则几何体结构的空间计算问题，先解释几个名词.

1．正棱锥：底面为正多边形，顶点在底面的投影为正多边形的中心的棱锥.

2．正四面体：侧棱和底面边长相等的正三棱锥，它的所有棱长都相等，四个面都是正三角形.

3．正棱台：正棱锥被平行于底面的平面所截，截面与底面之间的部分叫做正棱台.

4．圆台：圆锥被平行于底面的平面所截，截面与底面之间的部分叫做圆台.

涉及上述几何体的空间计算，核心往往都是抓住某个截面，把空间计算问题向平面转化，尤其是经过高的截面. 例如，在正三棱台中，如图 1 的截面 $A_1DEA$ 可沟通高、侧棱长、上下底面边长，如图 2 的截面 $DGHE$ 可沟通高、斜高（$GH$）、上下底面边长.

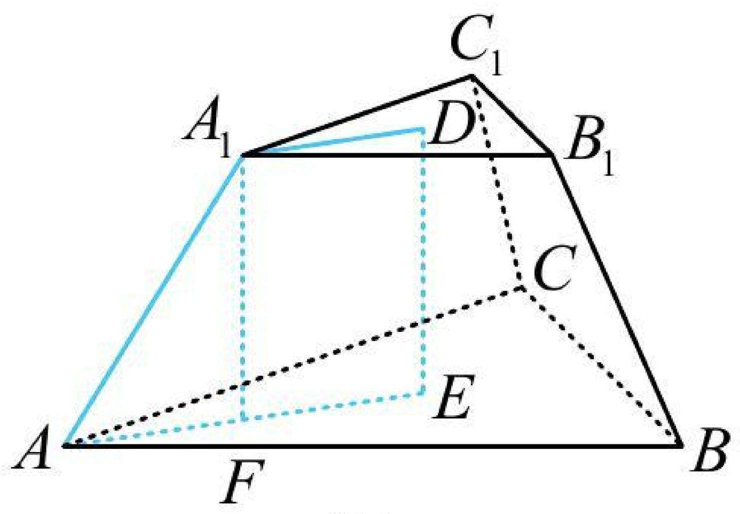


图1

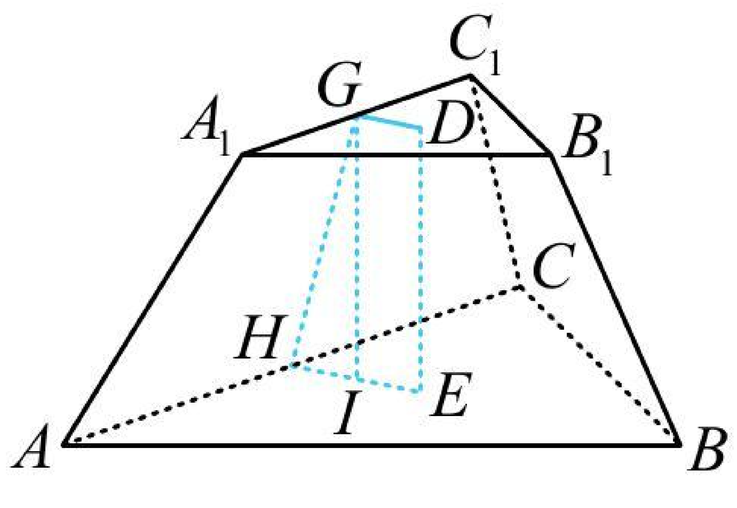


图2

对于其它规则几何体，处理方法也类似，按照题目条件，选取适当的截面研究即可.

5．对于内切球问题，也是选取适当的截面研究，一般会选取切点和轴（或高）所在的截面来分析.



## 典型例题

**类型Ⅰ：球的截面研究**

【例 1】（2020·新课标Ⅱ卷）已知 $\Delta ABC$ 是面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ 的等边三角形，且其顶点都在球 $O$ 的球面上，若球 $O$ 的表面积为 $16\pi$，则 $O$ 到平面 $ABC$ 的距离为（　　）

（A）$\sqrt{3}$　（B）$\frac{3}{2}$　（C）1　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

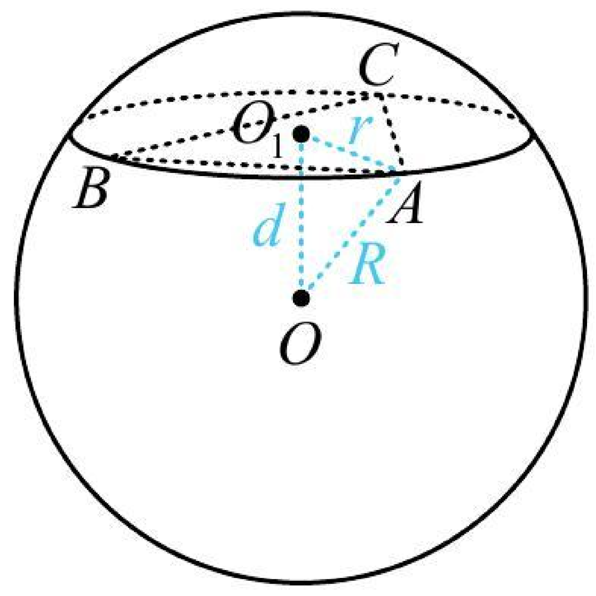
**解析：** 球心到截面的距离即为球心和截面圆圆心之间的线段长，故连接球心 $O$ 和 $\Delta ABC$ 的外心 $O_1$，

如图，$\Delta ABC$ 是面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ 的等边三角形，设边长为 $x$，则 $\frac{1}{2}x^2\sin 60^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}\Rightarrow x=3$，

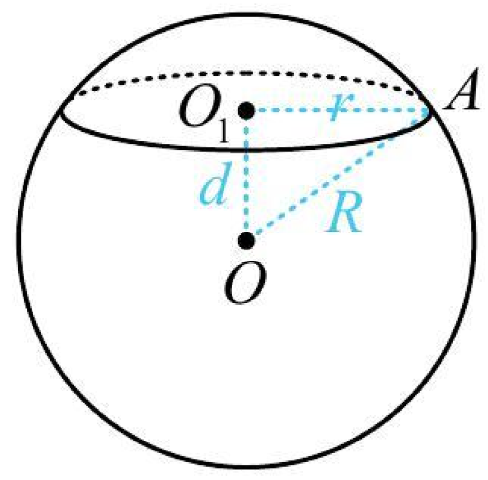
由正弦定理，$\frac{3}{\sin 60^{\circ}}=2r\Rightarrow r=\sqrt{3}$，由球的性质，$OO_1\perp$ 平面 $ABC$，所以 $OO_1\perp O_1A$，

球 $O$ 的表面积 $S=4\pi R^2=16\pi\Rightarrow R=2$，故 $O$ 到平面 $ABC$ 的距离 $d=\sqrt{OA^2-O_1A^2}=\sqrt{R^2-r^2}=1$.

**答案：** C




【反思】有关球的计算问题，常连接球心和截面圆圆心（该连线必垂直于截面圆所在的平面），在如图所示直角$\Delta OO_1A$中用勾股定理$r^2+d^2=R^2$沟通 $r$，$d$，$R$.




【变式】已知球 $O$ 的半径为 1，正四棱锥的顶点为 $O$，底面的四个顶点在球 $O$ 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为（　　）

（A）$\dfrac{1}{3}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**解析：**算正四棱锥的体积，需要底面边长和高，可设一个为变量，在如图所示的$\Delta OO_1A$中求另一个，

不妨设$OO_1=d$，则$O_1A=\sqrt{OA^2-OO_1^2}=\sqrt{1-d^2}$，所以$AB=\sqrt{2}O_1A=\sqrt{2(1-d^2)}$，

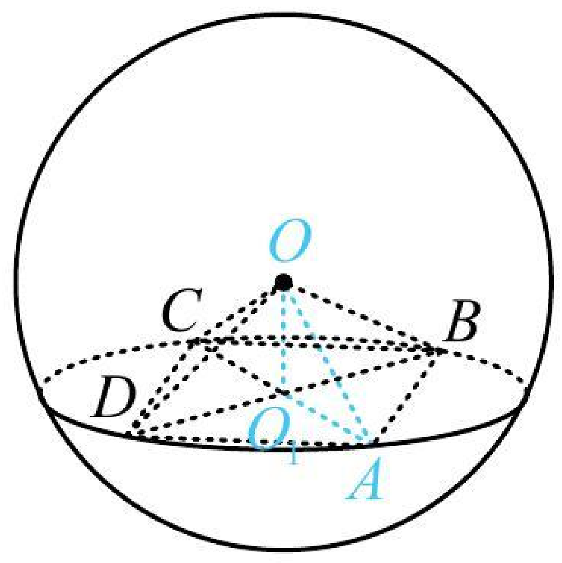


故$V_{O-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times 2(1-d^2)\cdot d=\dfrac{2}{3}(d-d^3)$，设$f(d)=\dfrac{2}{3}(d-d^3)(0<d<1)$，则$f'(d)=\dfrac{2}{3}(1-3d^2)$，

所以$f'(d)>0\Leftrightarrow 0<d<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$f'(d)<0\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{3}<d<1$，从而$f(d)$在$(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$上↗，在$(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1)$上↘，

故$f(d)_{\max}=f(\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，所以当该四棱锥的体积最大时，其高为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**答案：**C




**类型Ⅱ：锥体的“定海神针”—高**

【例 2】已知四棱锥的底面是边长为$\sqrt{2}$的正方形，侧棱长均为$\sqrt{5}$. 若圆柱的一个底面圆经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为_____.

**解析：**由条件可知四棱锥为正四棱锥，故先作高. 已知侧棱长，所以分析侧棱与高构成的截面 $SAO$，

如图 1，由题意，$AB=\sqrt{2}$，$SA=\sqrt{5}$，所以$OA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=1$，$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=2$，故圆柱的高$h=1$，

圆柱的一个底面圆为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的外接圆，如图 2，

因为 $A_1B_1=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以圆柱的底面半径 $r=O_1A_1=\frac{\sqrt{2}}{2}A_1B_1=\frac{1}{2}$，故圆柱的体积 $V=\pi r^2h=\frac{\pi}{4}$.

**答案：** $\frac{\pi}{4}$

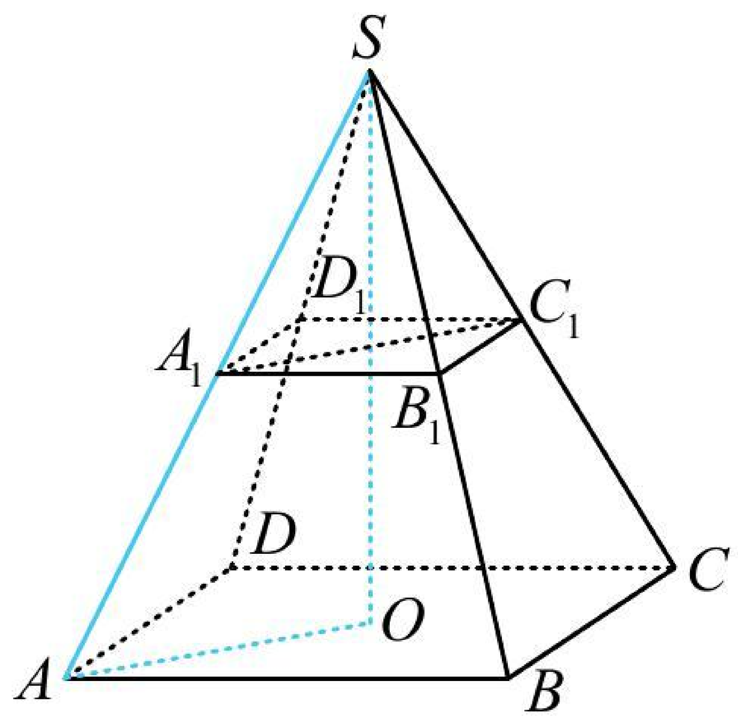



图1

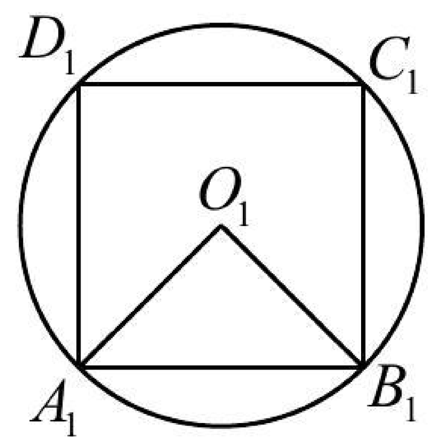



图2

【变式 1】(2020 •新课标 I 卷）埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为（　　）

（A）$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　（B）$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　　（D）$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$



**解析：** 涉及正四棱锥，需作高，且要求的是斜高（侧面三角形底边上的高）与底面边长的比值，故设出这两个量，通过分析过高和斜高的截面 $POE$ 来研究它们的关系，

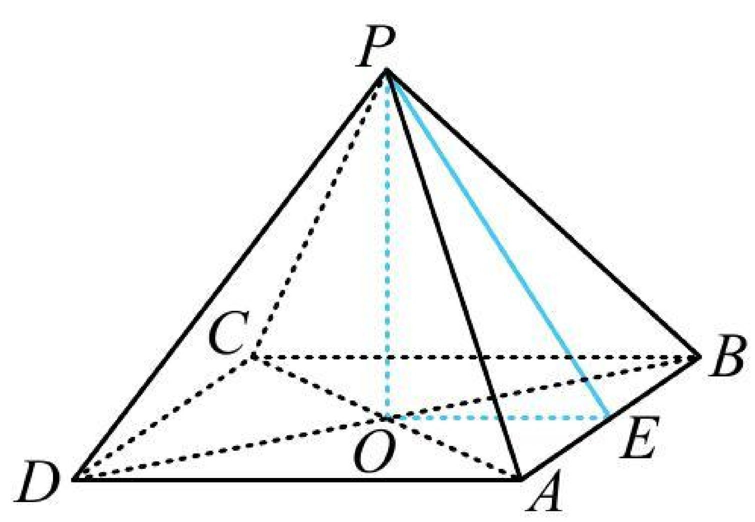
如图，设正四棱锥 $P-ABCD$ 底面边长为 $a$，斜高 $PE=h$，其中 $E$ 为 $AB$ 中点，则 $S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}AB\cdot PE=\frac{1}{2}ah$，

在 $\Delta POE$ 中，$OE=\frac{1}{2}AD=\frac{a}{2}$，所以四棱锥的高 $OP=\sqrt{PE^2-OE^2}=\sqrt{h^2-\frac{a^2}{4}}$，

由题意，以 $OP$ 为边长的正方形面积与 $\Delta PAB$ 的面积相等，所以 $h^2-\frac{a^2}{4}=\frac{1}{2}ah$，

整理得：$4h^2-2ah-a^2=0$，所以 $4(\frac{h}{a})^2-2\cdot\frac{h}{a}-1=0$，解得：$\frac{h}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ 或 $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$（舍去）.

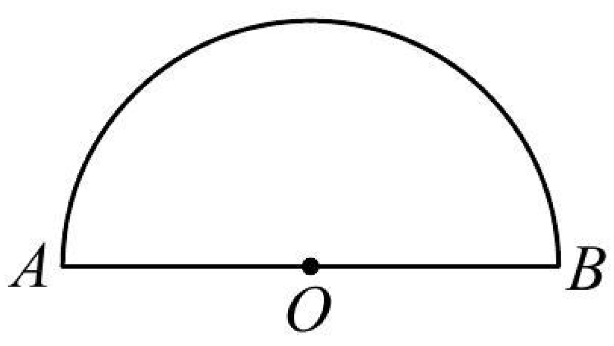
**答案：** C

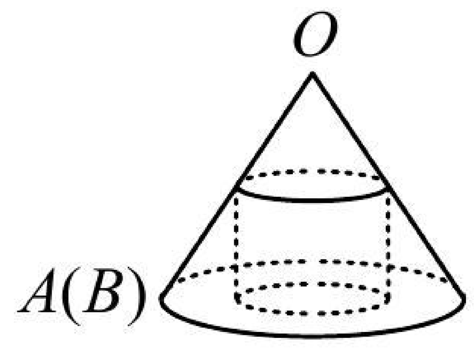


【反思】通过上两题可以发现，截面选取的动机非常明确，结合条件与要求的即可判断所需截面.

【变式 2】如图，将半径为 4 的半圆围成一个圆锥，在圆锥内接一个圆柱，当圆柱的侧面面积最大时，圆柱的底面半径是（　　）

（A）$\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　（B）$4\sqrt{3}-6$　　（C）1　　（D）$2\sqrt{3}\pi$




**解析：**涉及圆锥的计算，在轴截面中进行，如图，由题意，圆锥的母线长 $OA=OD=4$，

圆锥的底面周长等于半圆的弧长，所以 $2\pi\cdot GD=4\pi$，从而 $GD=2$，故 $OG=\sqrt{OD^2-GD^2}=2\sqrt{3}$，

要分析圆柱的侧面积何时最大，可设其底面半径，并求出高，把侧面积表示出来再看，

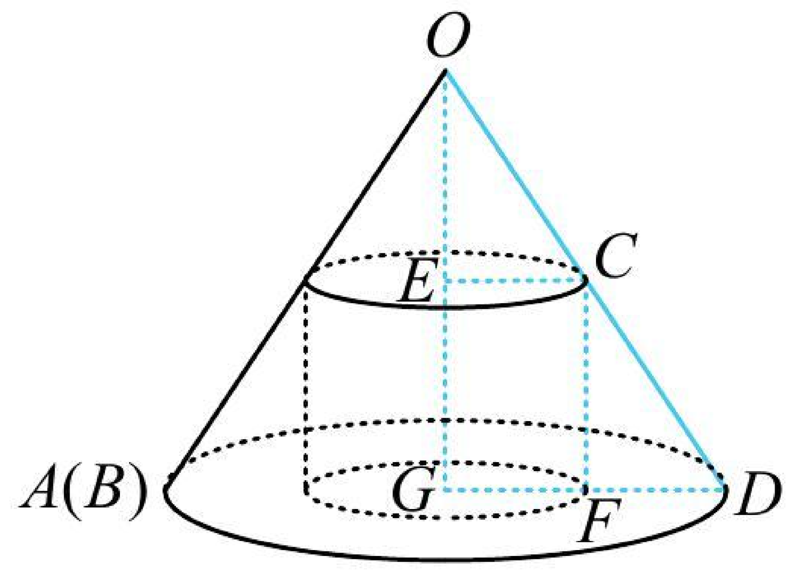
设圆柱的底面半径为 $r$，即 $CE=r$，由 $\Delta OEC\backsim\Delta OGD$ 可得 $\frac{CE}{GD}=\frac{OE}{OG}$,

所以 $\frac{r}{2}=\frac{OE}{2\sqrt{3}}$，故 $OE=\sqrt{3}r$，所以 $GE=OG-OE=2\sqrt{3}-\sqrt{3}r$，

故圆柱的侧面积 $S=2\pi r\cdot GE=2\pi r(2\sqrt{3}-\sqrt{3}r)=2\sqrt{3}\pi r(2-r)\le 2\sqrt{3}\pi\cdot(\frac{r+2-r}{2})^2=2\sqrt{3}\pi$，

当且仅当 $r=2-r$，即 $r=1$ 时取等号，所以当圆柱的侧面积最大时，其底面半径为 1.

答案：C

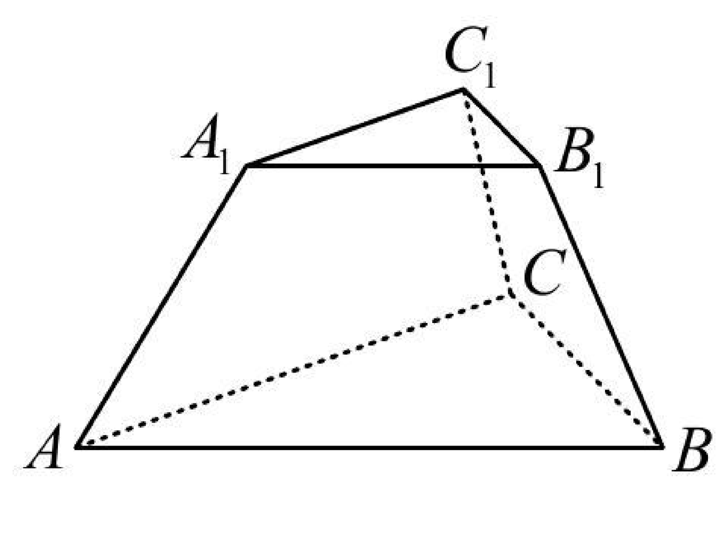



【总结】不管是正棱锥或圆锥，不管图形是否固定，核心总是根据条件选取适当的截面进行研究.

**类型III：台体的截面研究**

【例 3】如图，$ABC-A_1B_1C_1$ 是一个正三棱台，而且下底面边长为 6，上底面边长和侧棱长都为 3，则棱台的高为（　　）

（A）$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　（B）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　（C）$\sqrt{6}$　　（D）$\sqrt{3}$



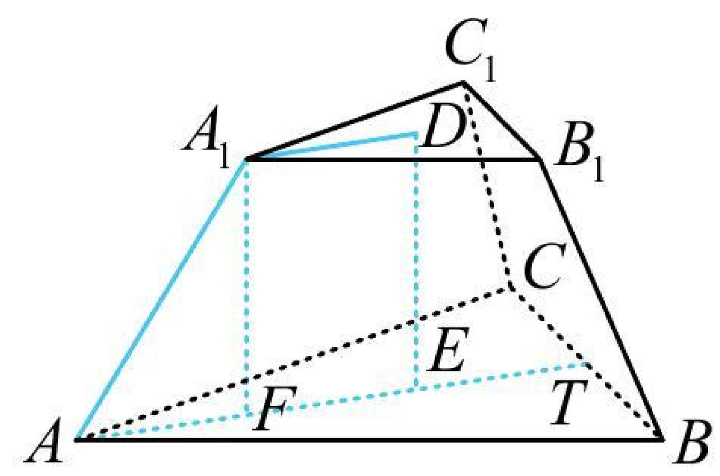
**解析：**涉及正三棱台，先画图作高，给了侧棱长，故分析高与侧棱构成的截面，

如图，$D$，$E$ 分别为上、下底面的中心，也是重心，$A_1F\perp AE$ 于 $F$，$T$ 是 $BC$ 中点，

则 $A$，$E$，$T$ 共线且 $AE=\frac{2}{3}AT=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}AB=2\sqrt{3}$，同理，$A_1D=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}A_1B_1=\sqrt{3}$，

所以 $EF=A_1D=\sqrt{3}$，$AF=AE-EF=\sqrt{3}$，故 $A_1F=\sqrt{AA_1^2-AF^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$.

**答案：**C




**类型Ⅳ：情景题探究**

【例 4】（2020·新高考Ⅰ卷）日晷是中国古代用来测定时间的仪器，利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间. 把地球看成一个球（球心记为 $O$），地球上一点 $A$ 的纬度是指 $OA$ 与地球赤道所在平面所成角，点 $A$ 处的水平面是指过点 $A$ 且与 $OA$ 垂直的平面，在点 $A$ 处放置一个日晷，若晷面与赤道所在平面平行，点 $A$ 处的纬度为北纬 $40^{\circ}$，则晷针与点 $A$ 处的水平面所成角为（　　）

（A）$20^{\circ}$　（B）$40^{\circ}$　（C）$50^{\circ}$　（D）$90^{\circ}$



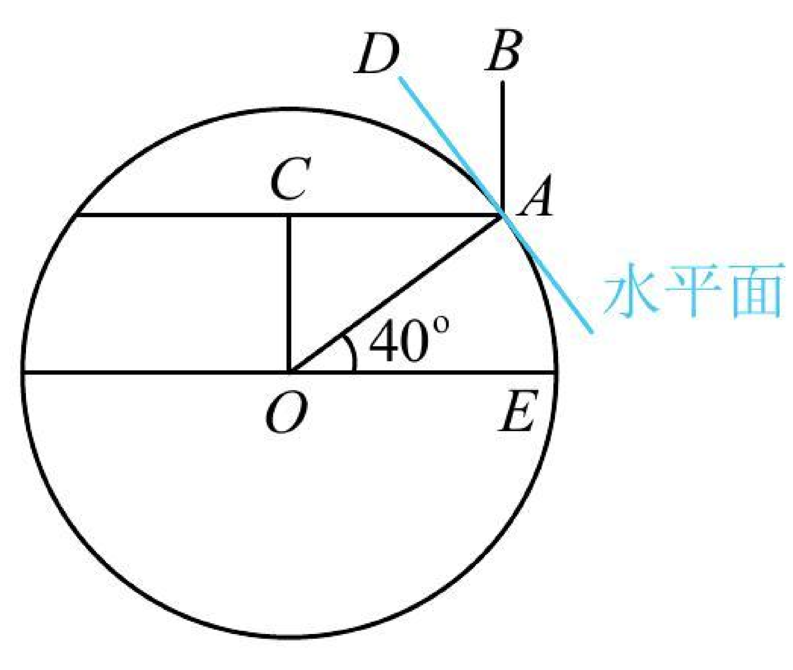
**解析：**本题信息较复杂，完整的图形不好画，可通过直观想象画出剖面图来看，

如图，晷针为 $AB$（晷面与赤道所在平面平行 $\Rightarrow$ 晷针与赤道平面垂直），

$A$ 处的纬度为北纬 $40^{\circ}\Rightarrow\angle AOE=40^{\circ}\Rightarrow\angle OAC=40^{\circ}$

$\Rightarrow\angle CAD=90^{\circ}-\angle OAC=50^{\circ}\Rightarrow\angle BAD=90^{\circ}-\angle CAD=40^{\circ}$，即晷针与点 $A$ 处的水平面所成角为 $40^{\circ}$.

**答案：**B




【反思】情景题并无通法，但涉及图形长度、角度的计算，时常会选取合适的截面研究.

类型Ⅴ：内切球问题

【例 5】（2020 • 新课标Ⅲ卷）已知圆锥的底面半径为 1，母线长为 3，则该圆锥内半径最大的球的体积为_____.

解析：显然球最大时，球内切于圆锥. 对于内切球问题，抓住切点与轴构成的截面来分析，由于二者都是旋转体，分析过轴的任意截面都行，不妨到截面 $PGA$ 中考虑，

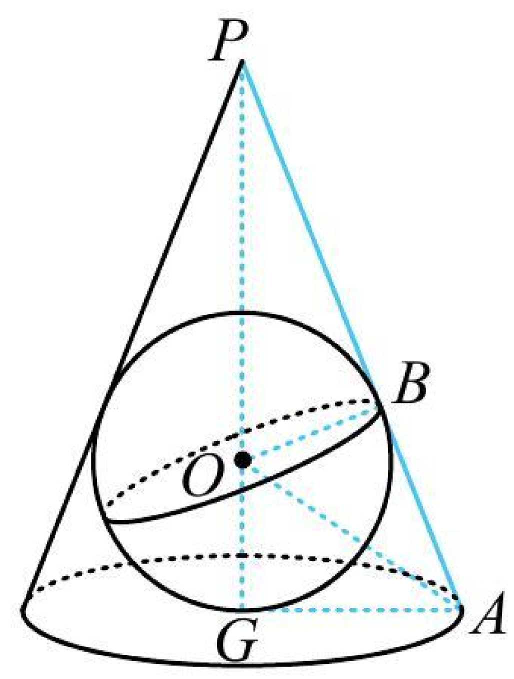
如图，该圆锥内半径最大的球即圆锥的内切球，设球心为 $O$，半径为 $R$，则 $OB=OG=R$，

由切线长相等可知，$AB=AG=1$，

由题意，$PG=\sqrt{PA^2-AG^2}=2\sqrt{2}$，所以 $OP=2\sqrt{2}-R$，$PB=PA-AB=2$，

在 $\Delta POB$ 中，由 $OB^2+PB^2=OP^2$ 可得 $R^2+4=(2\sqrt{2}-R)^2$，解得：$R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以球的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}$






【变式 1】已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长为 2，侧棱长为 $\sqrt{5}$，则该正四棱锥的内切球的表面积为_____.

解析：内切球问题中，切点是关键位置，故应分析切点与正四棱锥的高构成的截面，

如图 1，设 $E$ 是 $AB$ 的中点，$H$ 是 $CD$ 中点，$G$ 是底面中心，$F$ 是球面与侧面 $PAB$ 的切点，

由对称性，$F$ 在 $PE$ 上，球心 $O$ 在 $PG$ 上，把截面 $PHE$ 单独画出来如图 2，

因为 $AB=2$，$PA=\sqrt{5}$，所以 $PE=\sqrt{PA^2-AE^2}=2$，$GE=1$，$PG=\sqrt{PE^2-GE^2}=\sqrt{3}$，

要求内切球半径，可到 $\Delta POF$ 中用勾股定理建立方程求解，先求出该三角形的三边长，

设内切球 $O$ 的半径为 $R$，则 $OP=PG-OG=\sqrt{3}-R$，$OF=R$，由切线长相等可得 $EF=GE=1$，

所以 $PF=PE-EF=1$，在 $\Delta POF$ 中，$PF^2+OF^2=OP^2$，所以 $1^2+R^2=(\sqrt{3}-R)^2$，解得：$R=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以该正四棱锥的内切球的表面积 $S=4\pi R^2=\dfrac{4\pi}{3}$.

答案：$\dfrac{4\pi}{3}$

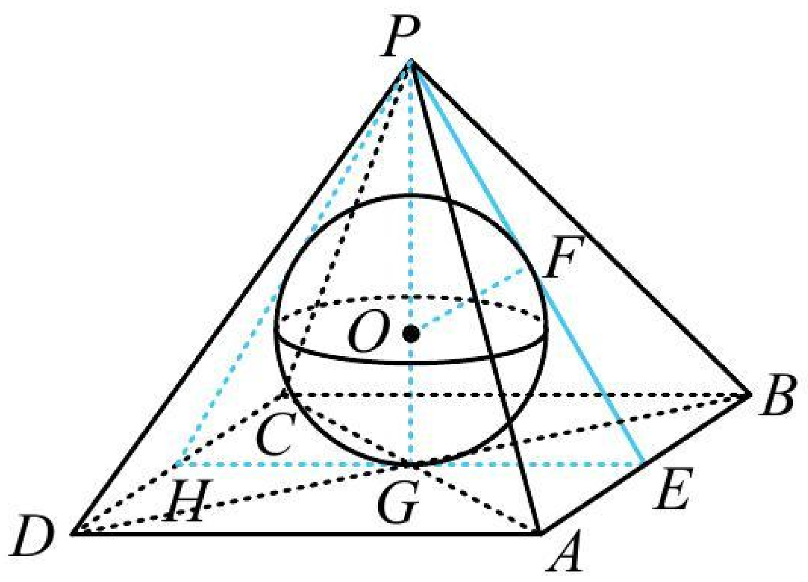


图1

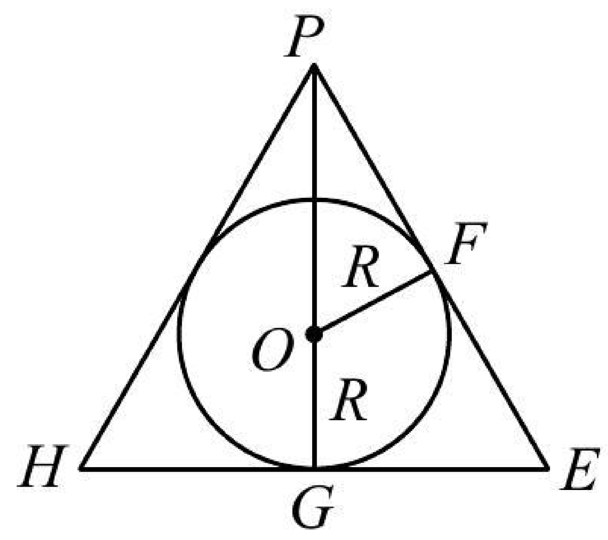


图2

【反思】求出 $PE=2$ 后，若注意到了 $\Delta PHE$ 是正三角形，则也可按 $R=OG=\frac{1}{3}PG=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 来速求 $R$.

【变式 2】已知圆台上底面半径为 1，下底面半径为 2，球与圆台的两个底面和侧面均相切，则该圆台的侧面积与球的表面积之比为_____.

**解析：**球与圆台都是旋转体，取过轴的任意一个截面来分析均可，

如图，$AD\perp O_2B$ 于 $D$，则 $O_2D=O_1A=1$，$BD=O_2B-O_2D=1$，

由切线长相等可知，$AC=AO_1=1$，$BC=BO_2=2$，所以 $AB=AC+BC=3$，

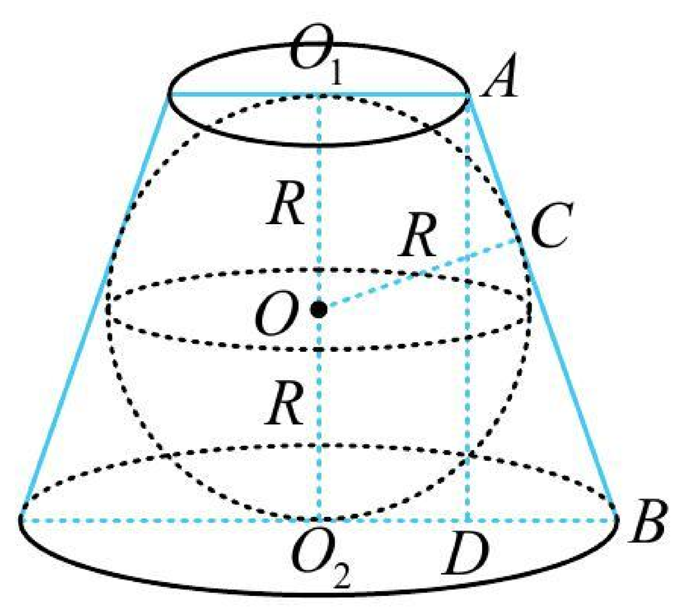
故圆台侧面积 $S_1=\pi(r_1+r_2)l=\pi\times(1+2)\times 3=9\pi$，再算球的半径，在 $\Delta ABD$ 中由勾股定理求解即可，

设球的半径为 $R$，则 $AD=O_1O_2=2R$，在 $\Delta ABD$ 中，$AD^2+BD^2=AB^2$，即 $4R^2+1=9\Rightarrow R=\sqrt{2}$，

所以球的表面积 $S_2=4\pi R^2=8\pi$，故该圆台的侧面积与球的表面积之比为 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{9}{8}$.



**答案：**$\frac{9}{8}$




【总结】涉及内切球半径的计算，往往在高（或轴）和切点构成的截面中来分析.

## 强化训练

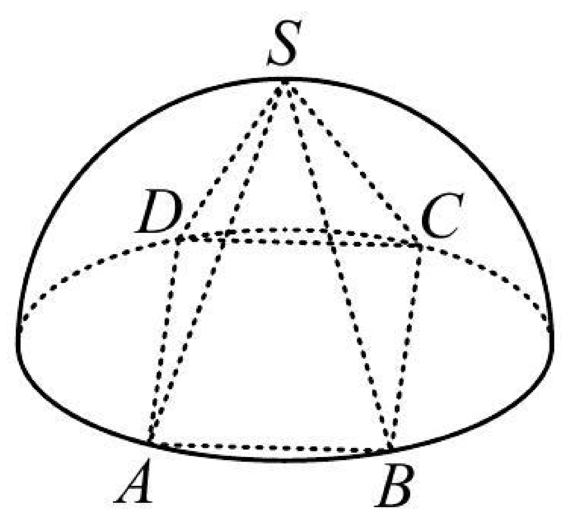
### 类型Ⅰ：规则几何体计算

1.（2023·河南周口模拟·★★）已知 $\Delta ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，其顶点都在球 $O$ 的球面上，若球 $O$ 的体积为 $\frac{32\pi}{3}$，则球心 $O$ 到平面 $ABC$ 的距离为（　　）

（A）$\sqrt{3}$　（B）$\frac{3}{2}$　（C）1　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2.（2023 • 天津模拟 • ★★）如图，半球内有一内接正四棱锥 $S-ABCD$，该四棱锥的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$，则该半球的体积为（　　）

（A）$\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$　（B）$\frac{4\sqrt{2}}{9}\pi$　（C）$\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$　（D）$\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$




3.（2023 • 天津模拟 • ★★）侧棱长为 2 的正三棱锥，若其底面周长为 9，则该正三棱锥的体积是（　　）

（A）$\frac{9\sqrt{3}}{2}$　（B）$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　（C）$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　（D）$\frac{9\sqrt{3}}{4}$



4.（2023 • 全国乙卷 • ★★★）已知圆锥 $PO$ 的底面半径为 $\sqrt{3}$，$O$ 为底面圆心，$PA$，$PB$ 为圆锥的母线，$\angle AOB=120^{\circ}$，若 $\Delta PAB$ 的面积等于 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$，则该圆锥的体积为（　　）

（A）$\pi$　（B）$\sqrt{6}\pi$　（C）$3\pi$　（D）$3\sqrt{6}\pi$

5.（2023 • 重庆模拟 • ★★★）圆台上、下底面圆的圆周都在一个半径为 5 的球面上，其上、下底面圆的周长分别为 $8\pi$ 和 $10\pi$，则该圆台的侧面积为（　　）

（A）$8\sqrt{10}\pi$　　（B）$8\sqrt{11}\pi$　　（C）$9\sqrt{10}\pi$　　（D）$9\sqrt{11}\pi$

6．（2023・新高考Ⅰ卷・★★★）在正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2$，$A_1B_1=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，则该棱台的体积为_____.

7．（2021・新高考Ⅱ卷・★★★）北斗三号全球卫星导航系统是我国航天事业的重要成果. 卫星导航系统中，地球静止同步轨道卫星的轨道位于地球赤道所在平面，轨道高度为36000km（轨道高度指卫星到地球表面的最短距离），把地球看成一个球心为$O$，半径$r$为6400km的球，其上点$A$的纬度是指$OA$与赤道所在平面所成角的度数，地球表面能直接观测到一颗地球静止同步轨道卫星的点的纬度的最大值记为$\alpha$，该卫星信号覆盖的地球表面面积$S=2\pi r^2(1-\cos\alpha)$，（单位：$\text{km}^2$），则$S$占地球表面积的百分比为（　　）

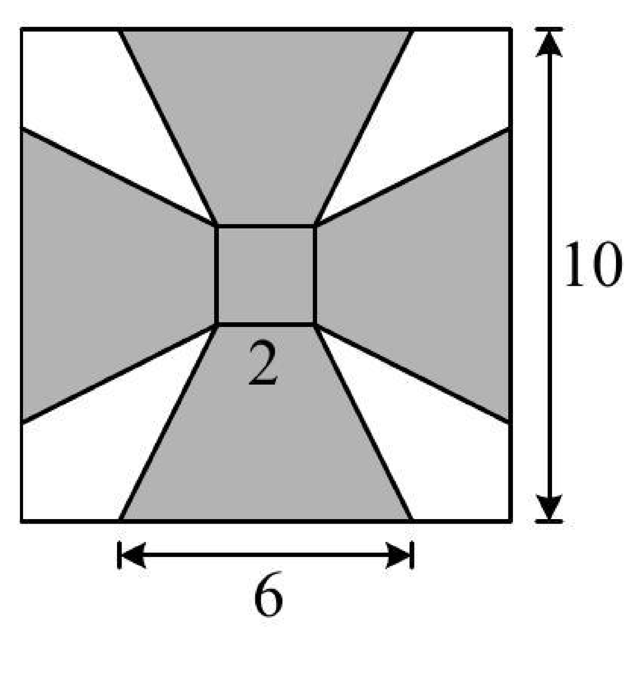


（A）26%　　（B）34%　　（C）42%　　（D）50%

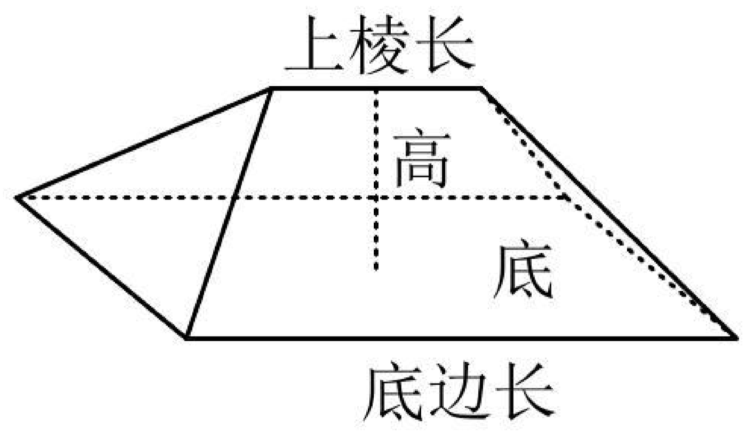
故

8．（2023・云南红河州一模・★★★★）如图所示是一块边长为10cm的正方形铝片，其中阴影部分由四个全等的等腰梯形和一个正方形组成，将阴影部分裁剪下来，并将其拼接成一个无上盖的容器（铝片厚度不计），则该容器的容积为（　　）

（A）$\dfrac{80\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$　　（B）$\dfrac{104\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$　　（C）$80\sqrt{3}\text{cm}^3$　　（D）$104\sqrt{3}\text{cm}^3$



9.（2022•江苏连云港模拟•★★★★）刍甍是中国古代算数中的一种几何体，其结构特征是：底面为长方形，上棱和底面平行，且长度不等于底面平行的棱长的五面体，是一个对称的楔形体，如图.




已知一个刍甍底边长为6，底边宽为4，上棱长为2，高为2，则它的表面积为（　　）

（A）$24\sqrt{2}$　　（B）$24+24\sqrt{2}$　　（C）$24+24\sqrt{5}$　　（D）$24+16\sqrt{2}+8\sqrt{5}$

类型Ⅱ：内切球问题

10.（2017•江苏卷•★★）圆柱的上下底面圆的圆心分别为$O_1$，$O_2$，圆柱内有一个球，该球与上、下底面和母线均相切，记圆柱的体积为$V_1$，球的体积为$V_2$，则$\dfrac{V_1}{V_2}=$______.



11.（2023•山东潍坊模拟•★★★）已知圆锥的底面半径为2，高为$4\sqrt{2}$，则该圆锥内切球的表面积为（　　）

（A）$4\pi$　　（B）$8\pi$　　（C）$16\pi$　　（D）$32\pi$

12.（2016 •新课标Ⅲ卷 •★★★★）在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 $V$ 的球，若 $AB\perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，$AA_1=3$，则 $V$ 的最大值是（　　）

（A）$4\pi$　（B）$\dfrac{9\pi}{2}$　（C）$6\pi$　（D）$\dfrac{32\pi}{3}$